

地下水の揚水に関する研究

(第2報) 被圧地下水の場合、砂礫の透水係数算出方法

磯 島 義 一

Studies of Pumping Ground Water for Irrigation
2. A method of finding permeability through gravel
in the case of pressure head ground water

Yoshikazu ISOJIMA

はじめに

伊勢市の郊外で伊勢湾より内陸へ700m程入った所に、圃場整備で造成した井戸がある。

この井戸は揚水試験を行なって設計されたものであるが、通常の方法で透水係数が求められなかった事例である。通常の方法とは、透水速度は動水勾配に比例するというダルシーの法則を応用したものである。

揚水試験を担当したコンサルタントは、潮汐の変化より貯留係数を仮定して、透水係数を算出した。

本論文の第1報では上記の揚水試験データを、ダルシーの法則を応用した著者の方法で、透水係数が求められることを示した。

本論文の第2報では、計画設計して完成した上記の本井戸の揚水試験を行ない、透水係数を確認した。その結果、試験井戸と本井戸の透水係数を比較すると、6倍程の差があった。

透水係数は設計の目安の値であって、試験と実際の差を補完することが大切である。本井戸を造成する工事の途中で、計画揚水量を汲みあげて井戸の水位低下を確認し、経済的な土地改良施設を造成することが望ましい。

実験材料及研究方法

1. 実験材料

伊勢市村松町A井戸である。

2. 実験方法

口径200mmのうずまきポンプ2台を運転して揚水し、井戸の水位を観測する。水位は時刻と共に低下し、ほぼ一定水位になったら停止する。

3. 研究方法

地下水を賦存している砂礫の透水係数を求めるのが目的である。先ず被圧地下水の流量に関する関係式を作成する。次に揚水した水量と地下水の水頭曲線及び砂礫の空隙率の関係を方程式にする。二つの関係式より未知数の影響圏半径及び透水係数を解く。

次に揚水のデータより透水係数及び影響圏半径の数値を算出する。

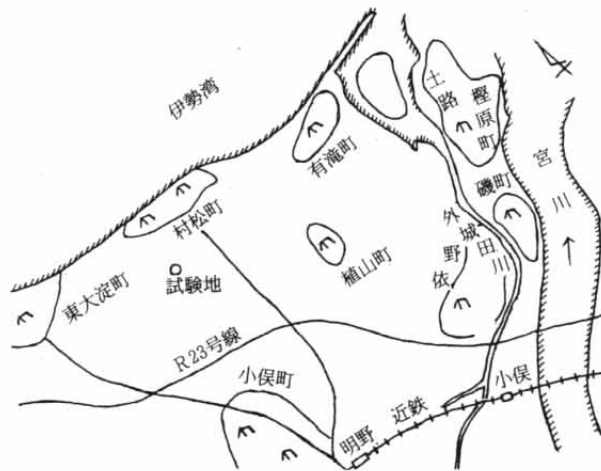
実験結果

現地は県営で圃場整備された地域である。水源は宮川用水と井戸である。揚水試験井戸は伊勢湾から700m程度内陸へ入った位置にある。井戸の大きさは直径5m(内径4m)長さ10mの施設である。耕作土の下に礫交りの赤土があり、その深さは3.1mである。砂礫層の厚さは9.6mである。地表面の標高はEL0.72m地下水は試験当日、地面より0.96m下りにあった。

口径200mm、揚水量 $3.75 \text{ m}^3/\text{min}$ ($=0.0625 \text{ m}^3/\text{s}$)、モーターの馬力は18.5kw うずまきポンプを2台運転して、井戸内水位を測定した。ポンプはパイプラインと直結しているので、流量はポンプの公称能力を使用することにした。揚水試験は平成4年7月28日行なった。

揚水は8時30分に開始して、9時57分に停止した。揚水流量は公称 $0.0625 \times 2 \text{ 台} = 0.125 \text{ m}^3/\text{s}$ 、井戸内水位は1.01m低下した。

試験記録は第1表のとおりである。



第1図 揚水試験位置図

第1表 揚水試験記録

時刻	井戸内水位 管天よりm	備考	時刻	井戸内水位 管天よりm	備考
8.30'00"	1.36	揚水開始	20"	2.17	
10"	1.40		30"	2.17	
20"	1.45		40"	2.18	
30"	1.50		50"	2.19	
40"	1.54		8.36'00"	2.20	
50"	1.58		10"	2.20	
8.31'00"	1.62		20"	2.21	
10"	1.67		30"	2.22	
20"	1.71		40"	2.22	
30"	1.75		50"	2.23	
40"	1.78		8.37'00"	2.24	
50"	1.81		10"	2.24	
8.32'00"	1.84		20"	2.25	
10"	1.87		30"	2.25	
20"	1.89		40"	2.26	
30"	1.92		50"	2.26	
40"	1.94		8.38'00"	2.27	
50"	1.96		10"	2.27	
8.33'00"	1.98		20"	2.27	
10"	2.00		30"	2.28	
20"	2.02		40"	2.28	
30"	2.03		50"	2.28	
40"	2.05		8.39'00"	2.29	
50"	2.06		10"	2.29	
8.34'00"	2.07		20"	2.29	
10"	2.09		30"	2.29	
20"	2.10	40"	2.30		
30"	2.12	50"	2.30		
40"	2.12	8.40'00"	2.30		
50"	2.14	41'00"	2.32		
8.35'00"	2.15	42'00"	2.33		
10"	2.16	43'00"	2.34		

時刻	井戸内水位 管天よりm	備考	時刻	井戸内水位 管天よりm	備考
8.44'00"	2.35	揚水停止	40"	1.71	
46'00"	2.35		50"	1.69	
47'00"	2.35		10.00'00"	1.67	
48'00"	2.36		10"	1.65	
49'00"	2.36		20"	1.63	
50'00"	2.36		30"	1.61	
51'00"	2.36		40"	1.61	
54'00"	2.37		50"	1.60	
9.00'00"	2.37		10.01'00"	1.59	
05'00"	2.37		10"	1.58	
57'00"	2.37		20"	1.58	
10"	2.28		30"	1.57	
20"	2.22		40"	1.56	
30"	2.17		50"	1.55	
40"	2.12		10.02'00"	1.55	
50"	2.07		20"	1.54	
9.58'00"	2.02		30"	1.53	
10"	2.98		40"	1.53	
20"	1.95		50"	1.53	
30"	1.91		10.03'00"	1.52	
40"	1.87		04'00"	1.51	
50"	1.83		05'00"	1.51	
9.59'00"	1.81		06'00"	1.50	
10"	1.78		10.21'00"	1.50	
20"	1.76				
30"	1.73				

考察

1. 現場透水係数を求める方法

地下水を揚水するとき、その流れを二つに分ける。一つは遠方から井戸の外側まで流れる水平方向の流れ、もう一つは井戸の外側から内側へ入る鉛直方向の流れである。二つの流れは、それぞれ水位差を生じて井戸の中へ流入する。井戸の水面低下は、それぞれの水位差を合計したものである。この流れはダルシーの法則に従う。即ち地下水が砂礫の空隙をゆっくり流れるとき、透水速度は動水勾配に比例する。比例定数が透水係数である。ダルシーの法則より、流量と井戸の水面低下との間に未知数の透水係数と影響圏半径を含んだ方程式を作成することができる。

被圧地下水を汲みあげるとき、水頭に差異が生じて、地下水が砂礫の中を流れる。自由面地下水の場合は水位差が生じて地下水が流れるのに対して、被圧地下水は水頭差が生じて地下水が流れる。

自由面地下水の場合、任意の半径rにおける水位低下hは

$$h = H - y = \frac{Q}{2\pi k H} \ln \frac{R}{r} \quad (1)$$

で表すことができる。但しQは揚水流量、kは透水係数、Hは滞水層の地下水を汲みあげる前の水深、Rはt時間地下水を汲みあげる場合、地下水位の影響圏半径である。

被圧地下水の場合、任意の半径rにおける水位低下hは

$$h = H - y = \frac{Q}{2\pi k H_0} \ln \frac{R}{r} \quad (2)$$

である。但しH₀は滞水層の厚さである。(1)式と(2)式を比較すると、全く同一である。

自由面地下水で取り扱ったのと同じように、揚水前後の水頭面で囲まれた体積Vに砂礫の空隙率λを掛けたものは揚水量(Q m³/s × t秒)に等しい。

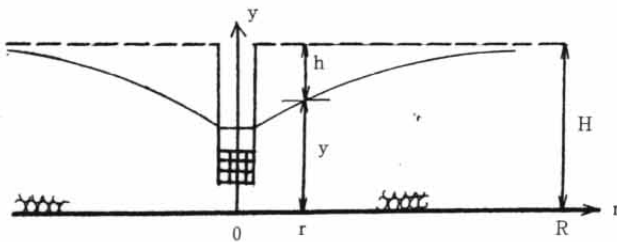
$$V \times \lambda = Q \times t \quad (3)$$

(3)式により二つの未知数、透水係数と影響圏半径を含んだ方程式を作成することができる。従って二つの方程式より未知数の透水係数と地下水の影響圏半径を求めることができた。

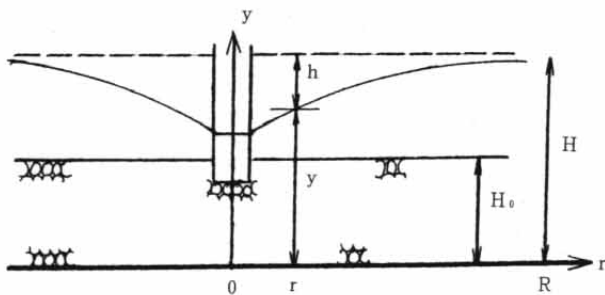
1-1 遠方から井戸の外側までの流れ

第3図に示すように、井戸の中心線を原点として、水平方向にr軸、鉛直方向にy軸をとる。揚水流量をQ m³/s、透水係数をk m/s、動水勾配を $\frac{dy}{dr}$ とすると、

$$Q = k \frac{dy}{dr} 2\pi r y \quad (1)$$



第2図 自由面地下水の流れ



第3図 井戸に向う水平な流れ

H₀は滞水層の厚さである。rの範囲を影響圏半径Rから、任意の半径rまで、yの範囲を水頭Hからyまでとすると

$$\int_r^R \frac{dr}{r} = \frac{2\pi k H_0}{Q} \int_y^H dy$$

$$\ln \frac{R}{r} = \frac{2\pi k H_0}{Q} \times (H - y)$$

水頭低下をhとすると

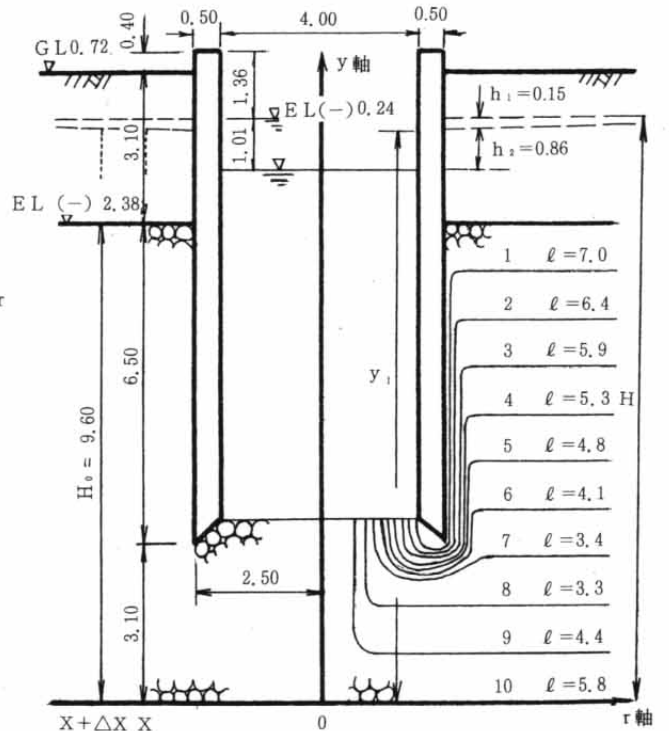
$$h = H - y = \frac{Q}{2\pi k H_0} \ln \frac{R}{r} \quad (2)$$

任意の半径rにおける水頭差は(2)式で表すことができる。

1-2 井戸の外側から内側へ入る流れ

井戸の外側まで水平方向に流れた地下水は、向きを鉛直方向に変えて井戸の中へ流入する。この流れを第4図に示した。地下水の流れをn等分して流量を算出する。地下水の透水速度は動水勾配に比例する。1からnまでの流管の中を流れる透水速度は等しいから、はるか遠方から井戸付近まで流れる地下水の流量は各流管とも等しい。

井戸の外側から内側へ流れる流れは、各流管とも等しい流れで流れなければならない。各流管について透水延長をℓ、透水断面をaとすると、 $\frac{a}{\ell}$ の値が等しくなる



第4図 井戸の外側から内側へ入る流れ

ような流管となる。

遠方から井戸の外側附近まで水頭差 h_1 で流れ、井戸の外側附近から井戸の中へ入るとき、 h_2 の水頭差が生ずるものとすれば

$$Q = k \frac{h_2}{l_1} a_1 + k \frac{h_2}{l_2} a_2 + \dots + k \frac{h_2}{l_n} a_n$$

$$= kh_2 \times \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{l_i}$$

$$h_2 = \frac{Q}{k \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{l_i}}$$

各流管とも等しい流量が流れるためには、井戸の底から井戸の内側へ入るとき、それぞれ流管の断面は透水長さに比例して配分すればよい。

井戸の水面低下を h とすると

$$h = h_1 + h_2$$

$$= \frac{Q}{2\pi k H_0} \ln \frac{R}{r} + \frac{Q}{k \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{l_i}}$$

$$k = \frac{Q}{h} \times \left(\frac{1}{2\pi H_0} \ln \frac{R}{r} + \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{l_i}} \right) \quad (4)$$

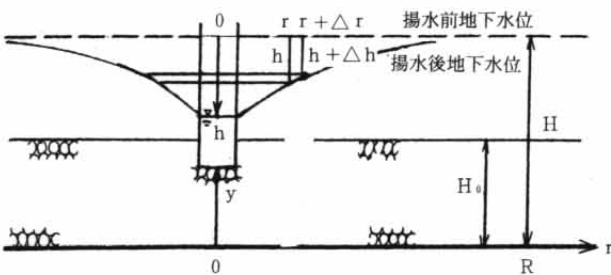
$$Q = \frac{kh}{\frac{1}{2\pi H_0} \ln \frac{R}{r} + \frac{1}{\sum \frac{a}{l}}} \quad (4')$$

1-3 揚水量と揚水前後の水頭面で囲まれた体積

被圧地下水では揚水により水頭低下を生ずる。自由面地下水のときのように、揚水前後の水頭面で囲まれた体積に砂礫の空隙率を掛けた数量は、揚水量に等しい。

$$V \times \lambda = Q \times t$$

$$V = \frac{Qt}{\lambda} \quad (3)$$



第5図 揚水前後の水頭

第5図には揚水前後の水頭の形状を示す。井戸の水面より鉛直方向に揚水前後の水位差 h 、水平方向は半径 r を表す。

揚水前後の地下水頭面で囲まれた図形の体積 V は

$$dV = -\pi r^2 dh$$

$$= -\pi r^2 d \left(\frac{Q}{2\pi k H_0} \ln \frac{R}{r} \right)$$

$$= -\frac{Q r^2}{2k H_0} d \ln \frac{R}{r}$$

$$= \frac{Q r^2}{2k H_0} \times \frac{dr}{r}$$

$$V = \int_r^R \frac{Q}{2k H_0} r dr = \frac{Q}{4k H_0} (R^2 - r^2) \quad (5)$$

(5) 式を (3) 式に代入すると

$$\frac{Q}{4k H_0} (R^2 - r^2) = \frac{Qt}{\lambda}$$

$$k = \frac{\lambda}{4H_0 t} (R^2 - r^2) \quad (6)$$

(4) 式を (6) 式は等しい。

$$\frac{Q}{h} \left(\frac{1}{2\pi H_0} \ln \frac{R}{r} + \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{l_i}} \right) = \frac{\lambda}{4H_0 t} (R^2 - r^2)$$

r の値は R に比べて小さい。 r は数 m のものであるのに対し R は数百 m 程度である。 $R^2 - r^2 \approx R^2$ としてよいので

$$\frac{\lambda}{4H_0 t} R^2 - \frac{Q}{2\pi H_0 h} \ln \frac{R}{r} - \frac{Q}{h} \times \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{l_i}} = 0 \quad (7)$$

(7) 式より影響圏半径 R を求め、 R の数値を (4) 式か (6) 式に代入して、透水係数 k を求めることができる。

2. 透水係数及び影響圏半径

揚水停止時点における影響圏半径は189m、透水係数は0.0587m/sであった。

本論文の特長は現場の揚水条件に適合するよう、地下水を揚水するとき流量に関する関係式を補完したことである。その方法は第4図に示すように地下水が井戸の外側から内側へ流入するとき、流線を作成して、現場の揚水条件に合うようにした。

流線の作成方法は次の通りである。第4図に示すよう

に10個の流管に分割して、透水長さを図測する。長さは流管の中心で測定する。それぞれの流管の井戸底から井戸の中へ入る流入面積は、井戸底の面積 $\pi \times 2.5^2 = 12.56$ m^2 を透水長さで比例配分する。それは、各流管を流れる流量は等しくする。動水勾配は各流管とも同じである。流管断面を井戸の外側で等分割すれば、各流管を流れる流量は等しい。井戸内半径は

$$r_i = \sqrt{\frac{a_i}{3.14}}$$

から計算する。 a_i は流入面積の累計である。井戸内半径 r_i は

$$\pi r^2 = a_i + \pi \times 2.5^2$$

から計算する。いずれの半径も流線を作図する時、使用するものである。以上のようにして $\sum \frac{a_i}{\ell_i}$ の値を計算す

る。 $\sum \frac{a_i}{\ell_i}$ の値を(7)式に入れて影響圏半径 R を求め、(6)式より透水係数 k を算出した。

2-1 透水係数及び影響圏半径の計算

揚水試験の結果は第6、第7図のとおりである。影響圏半径は二次曲線のような形状で、時間の推移と共に広がっていくことを示している。

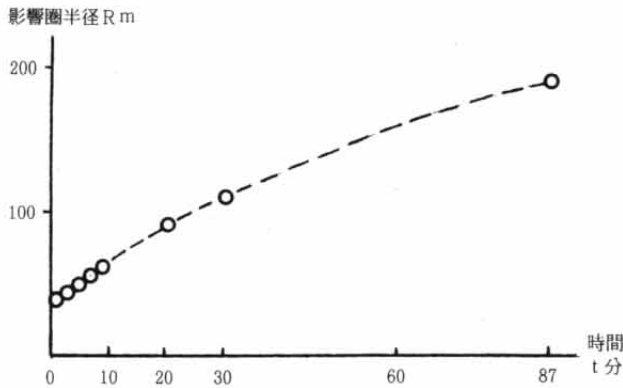
透水係数については、10分迄は混乱があるが、これ以降は、時間の推移に対して一定の値($k = 0.058 m/s$)となった。

第2表 a/ℓ 計算

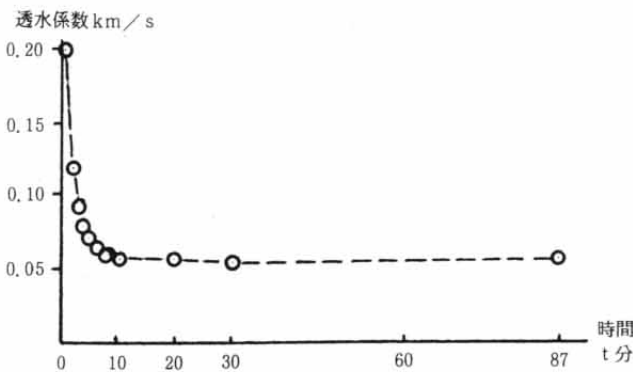
番号 (i)	透水長さ ℓ_i (m)	同左割合	流入面積 a_i (m^2)	同累計 $\sum a_i$ (m^2)	井戸内半径 r (m)	累計 $\sum a_i$	井戸外半径 r' (m)	$\frac{a}{\ell}$
1	7.0	0.139	1.745	12.560	2.000	1.745	2.608	0.249
2	6.4	0.127	1.595	10.815	1.855	3.340	2.704	0.249
3	5.9	0.117	1.469	9.220	1.713	4.809	2.789	0.248
4	5.3	0.105	1.318	7.751	1.571	6.127	2.863	0.248
5	4.8	0.095	1.193	6.433	1.431	7.320	2.929	0.248
6	4.1	0.081	1.017	5.240	1.291	8.337	2.984	0.248
7	3.4	0.067	0.841	4.223	1.159	9.178	3.056	0.248
8	3.3	0.065	0.817	3.382	1.038	9.995	3.071	0.248
9	4.4	0.087	1.094	2.565	0.904	11.089	3.127	0.249
10	5.8	0.117	1.471	1.471	0.684	12.560	3.201	0.253
計	50.4	1.000	12.560					2.488

第3表 影響圏半径と透水係数の計算

時刻	水位	水位差	時間	$\frac{\lambda}{4tH_0}$	$\frac{Q}{2\pi H_0 h}$	$\frac{Q}{h \sum a/\ell}$	R	k
8:30	1.36 m	m	秒				m	m/s
8:31	1.62	0.26	60	1.43×10^{-4}	7.96×10^{-3}	0.193	39	0.217
8:32	1.84	0.48	120	7.16×10^{-5}	4.31×10^{-3}	0.105	41	0.120
8:33	1.98	0.62	180	4.77×10^{-5}	3.34×10^{-3}	0.0810	44	0.092
8:34	2.07	0.71	240	3.58×10^{-5}	2.91×10^{-3}	0.0707	47	0.0791
8:35	2.15	0.79	300	2.86×10^{-5}	2.62×10^{-3}	0.0635	50	0.0715
8:36	2.20	0.84	360	2.39×10^{-5}	2.46×10^{-3}	0.0598	53	0.0670
8:37	2.24	0.88	420	2.05×10^{-5}	2.35×10^{-3}	0.0570	56	0.0641
8:38	2.27	0.91	480	1.79×10^{-5}	2.27×10^{-3}	0.0572	59	0.0622
8:39	2.29	0.93	540	1.59×10^{-5}	2.23×10^{-3}	0.0570	62	0.0611
8:40	2.30	0.94	600	1.43×10^{-6}	2.20×10^{-3}	0.0534	65	0.0655
8:50	2.36	1.00	1,200	7.16×10^{-6}	2.07×10^{-3}	0.0502	90	0.0579
9:00	2.37	1.01	1,800	4.77×10^{-6}	2.05×10^{-3}	0.0497	109	0.0566
9:57	2.37	1.01	5,220	1.64×10^{-6}	2.05×10^{-3}	0.0497	189	0.0587



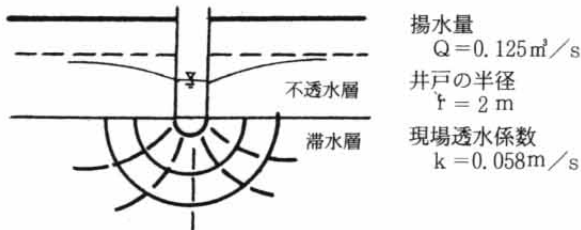
第6図 影響圏半径の時間的推移



第7図 透水係数の時間的推移

3. 各種の井戸について

3-1 砂礫層の厚さが無限にある場合、井戸水面低下



第8図 滞水層の厚さが無限にある井戸

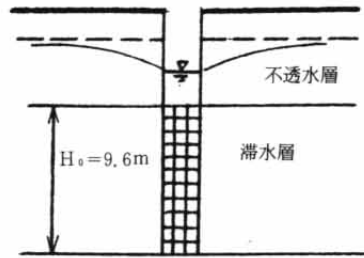
地下水は底から流入する場合はフォルヒハイマーの式が使用できる。 $Q = 4krh$ より

$$h = \frac{Q}{4kr} = \frac{0.125}{4 \times 0.058 \times 2} = 0.27\text{m}$$

井戸の水面低下は0.27mである。

3-2 有限の砂礫層で、地下水は横から流入する場合、井戸水面低下

影響圏半径は（6）式より、rは小さい数値なので省



第9図 滞水層の厚さが有限の井戸

揚水量 $Q = 0.125\text{m}^3/\text{s}$
井戸の半径 $r = 2\text{m}$
現場透水係数 $k = 0.058\text{m}/\text{s}$
揚水時間 87分 = 5220秒
滞水層の厚さ $H_0 = 9.6\text{m}$
砂礫の空隙率 0.33
井戸の外径 $r = 2.5\text{m}$

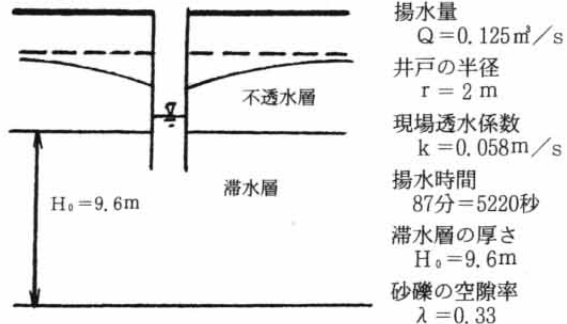
略すると

$$R = \sqrt{\frac{4kH_0t}{\lambda}} = \sqrt{\frac{4 \times 0.058 \times 9.6 \times 5220}{0.33}} = 184\text{m}$$

井戸の水面低下は

$$h = \frac{Q}{2\pi k H_0} \ln \frac{R}{r} = \frac{0.125}{2 \times 3.14 \times 0.058 \times 9.6} \times \ln \frac{184}{2.5} = 0.15\text{m}$$

3-3 有限の砂礫層があり、井戸の底は同層の途中で止まっている場合



第10図 井戸底が砂礫層の途中で止まっている井戸

井戸の外側まで地下水が砂礫の空隙を滲透するとき、水頭低下は0.15m、井戸の外側から内側へ入るとき

$$h = \frac{Q}{k \sum \frac{a}{l}} = \frac{0.125}{0.058 \times 2.488} = 0.86\text{m}$$

井戸の水面低下は $0.15 + 0.86 = 1.01\text{m}$ となる。

3-4 揚水時間と井戸の水面低下

3-3の条件でポンプを8時間連続運転する場合、地下水の影響圏半径は(6)式より

$$R = \sqrt{\frac{4kH_0 t}{\lambda}} = \sqrt{\frac{4 \times 0.058 \times 9.6 \times 8 \times 3600}{0.33}} = 440 \text{ m}$$

井戸の水面低下は

$$h = \frac{0.125}{2 \times 3.14 \times 0.058 \times 9.6} \times \ln \frac{440}{2.5} + \frac{0.125}{0.058 \times 2.488}$$

$$= 1.05 \text{ m}$$

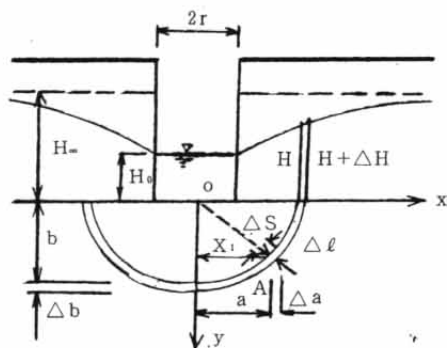
12時間運転すると、影響圏半径は

$$R = \sqrt{\frac{4 \times 0.058 \times 12 \times 3600}{0.33}} = 539 \text{ m}$$

井戸の水面低下は

$$h = \frac{0.125}{2 \times 3.14 \times 0.058 \times 9.6} \times \ln \frac{539}{2.5} + \frac{0.125}{0.058 \times 2.488}$$

$$= 1.06 \text{ m}$$



第11図 楕円の等ポテンシャル回転面を持つ井戸

4. 滞水層の厚さが無限にあり、井戸底から流入のある井戸

第11図に示すように、地下水は水平な底面より流入する。流線は双曲線、等ポテンシャル線は楕円で表される。森島が¹⁾フォルヒハイマー式 ($Q = 4kr \cdot (H_0 - H)$) の証明をしている。微分方程式の作成までは、森島論文を引用し、それを解いて、影響圏半径を求める作業は著者が行った。微分方程式を解くとき、双曲線関数を使って解いた例である。

x 軸上の a 点を長軸とする楕円は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

x 軸上 $a + \Delta a$ 点においては

$$\frac{x^2}{(a + \Delta a)^2} + \frac{y^2}{(b + \Delta b)^2} = 1$$

ところで、 $(a + \Delta a)^2 = a^2 + 2a\Delta a$ 、 $(b + \Delta b)^2 = b^2 + 2b\Delta b$ とする。

楕円に直角方向に $\Delta \ell$ とすると

$$d\ell = \frac{da}{b} \sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}$$

但し $x = a \cos \theta$ 、 $y = b \sin \theta$

地下水が $\Delta \ell$ だけ移動する時、失われるポテンシャルエネルギーを ΔH とすると、動水勾配 i は、

$$i = \frac{dH}{d\ell} = \frac{dH}{da} \frac{b}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}}$$

A点において、微小長を Δs とすれば、 Y 軸のまわりの回転楕円体の微小部分は $2\pi x ds$ であるからこの部分を通過する水量は

$$dQ = k \cdot i \cdot 2\pi x ds$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$dx = a \sin \theta d\theta$$

$$dy = b \cos \theta d\theta$$

$$ds = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} d\theta$$

$$dQ = 2\pi k \frac{dH}{da} ab \cos \theta d\theta$$

$$Q = 2\pi k \frac{dH}{da} ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta$$

$$= 2\pi k \frac{dH}{da} ab$$

$$r^2 = a^2 - b^2 \quad \text{から} \quad b = \sqrt{a^2 - r^2}$$

(r は焦点)を代入すると、

$$Q = 2\pi k \frac{dH}{da} a \sqrt{a^2 - r^2}$$

$$dH = \frac{Q}{2\pi k} \times \frac{da}{a\sqrt{a^2 - r^2}}$$

以上が森島先生の論文である。

$$\int_{H_0}^{H_\infty} dH = \frac{Q}{2\pi k} \int_{a=r}^{a=R} \frac{da}{a\sqrt{a^2-r^2}}$$

$$H_\infty - H_0 = \frac{Q}{2\pi k} I, I = \int_{a=r}^{a=R} \frac{da}{a\sqrt{a^2-r^2}}$$

を双曲線関数を使って解くことにする。

$$I = \int_r^R \frac{da}{a\sqrt{a^2-r^2}}$$

$$= \frac{1}{r} \int_r^R \frac{d\left(\frac{a}{r}\right)}{\left(\frac{a}{r}\right)\sqrt{\left(\frac{a}{r}\right)^2-1}}$$

ここで $\frac{a}{r} = \cosh y$ とおくと

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 - 1 = \cosh^2 y - 1$$

$$= \sinh^2 y$$

$$d\left(\frac{a}{r}\right) = d \cosh y$$

$$= d\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(de^y + de^{-y})$$

$$= \frac{1}{2}\{e^y dy + e^{-y} d(-y)\}$$

$$= \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) dy$$

$$= \sin hy dy$$

$$I = \frac{1}{r} \int \frac{\sin hy dy}{\cosh y \cdot \sinh y}$$

$$= \frac{1}{r} \int \frac{dy}{\cosh y}$$

$$= \frac{1}{r} \int \frac{2dy}{e^y + e^{-y}}$$

$$= \frac{1}{r} \int \frac{2e^y}{e^{2y} + 1} dy$$

$$I = \frac{2}{r} \int \frac{de^y}{e^{2y} + 1}$$

$$= \frac{2}{r} \tan^{-1} e^y$$

(10) 式より e^y を求めると

$$\cos hy = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{a}{r}$$

$$e^y + \frac{1}{e^y} = \frac{2a}{r}$$

$$e^{2y} - \frac{2a}{r} e^y + 1 = 0$$

$$e^y = \frac{\frac{2a}{r} + \sqrt{\left(\frac{2a}{r}\right)^2 - 4}}{2}$$

$$= \frac{a}{r} + \sqrt{\left(\frac{a}{r}\right)^2 - 1}$$

(11) 式を (9) 式に代入すると

$$I = \frac{2}{r} \tan^{-1} \left[\frac{a}{r} + \sqrt{\left(\frac{a}{r}\right)^2 - 1} \right]_{a=r}^{a=R}$$

$$= \frac{2}{r} \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{R}{r} + \sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 1} \right) - \frac{\pi}{4} \right\}$$

従って求める関係式は

$$H_\infty - H_0 =$$

$$\frac{Q}{\pi k r} \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{R}{r} + \sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 1} \right) - \frac{\pi}{4} \right\} \quad (12)$$

(12) 式は一定流量 Q を揚水するとき、井戸の底から流入のある場合の水頭低下と影響圏半径に関する関係式である。

次に等ポテンシャル線の形状を求めることにする。等ポテンシャル線は次のような楕円²⁾で表すことができる。

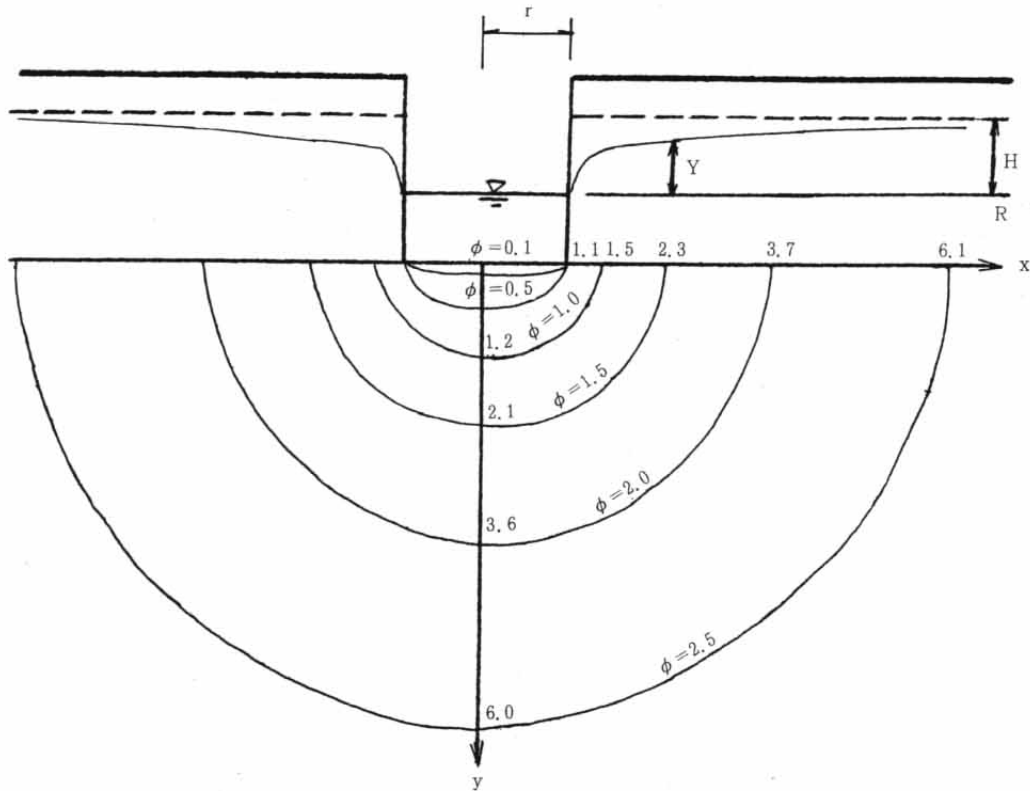
$$\frac{x^2}{a^2 \cos^2 h^2 \phi} + \frac{y^2}{a^2 \sin^2 h^2 \phi} = 1$$

(a : 焦点、井戸の半径)

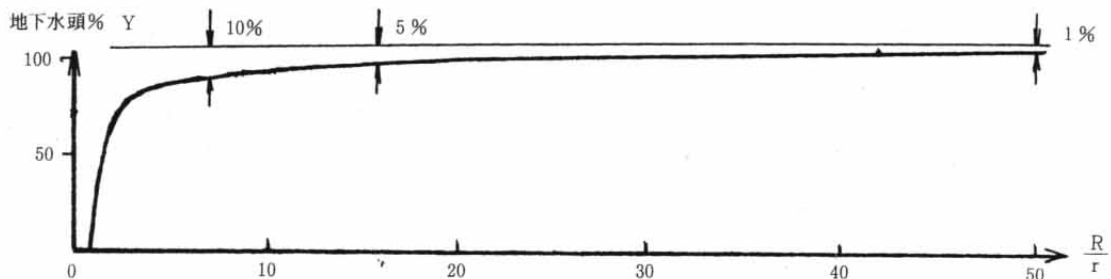
第12図に示すように、等ポテンシャル面は楕円の回転面である。

それは球面に近い形から楕円面を経て、井戸底の平面になる。これが双曲線関数の特長である。

等ポテンシャル面は地下水の流線と直交する。地下水の流入面である。従って砂礫層の厚さが無限に大きい前提条件がある。この条件があって、一定の揚水流量 Q を



第12図 等ポテンシャル線の形状



第13図 井戸より任意の半径Rにおける地下水の水頭（rは井戸の半径）

揚水するとき

$$Q = 4kr(H_0 - H_w)$$

が成立する。但しkは透水係数，rは井戸の半径， $H_w - H_0$ は井戸の水面低下である。

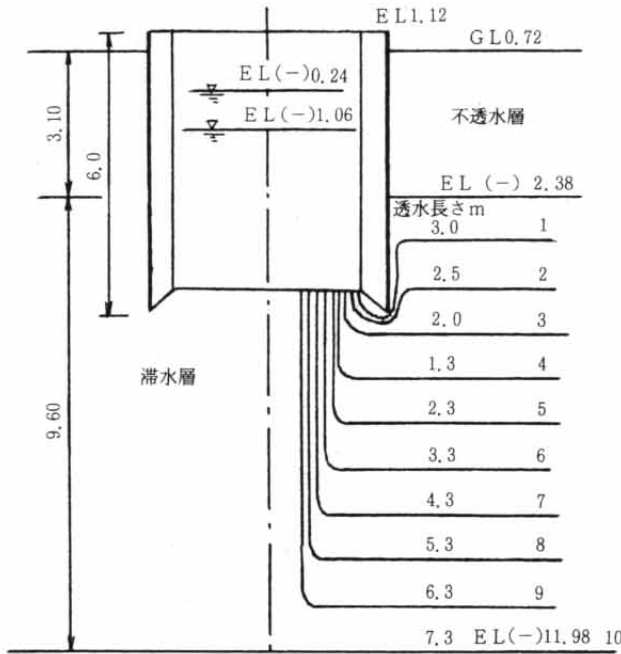
砂礫層の厚さは有限である。事例によると5mから10m程度である。上記の関係式から透水係数を求めることは適しない。流入断面を大きく考えているから、透水係数は小さく算出される。

地下水の水頭低下は第13図に示すとおりである。揚水井戸の水面低下の10%の水頭低下が起こる位置は、井戸の半径の7倍の位置である。5%のときは15倍であり、1%のとき50倍である。このような砂礫の深さがあって上記の流量関係式は成立する。

砂礫層の厚さが有限の場合は、著者が提案する(4)式の流量に関する関係式が適する。地下水は水平に砂礫の空隙を滲透するとき $h_1 (= \frac{Q}{2\pi k H_0} \ln \frac{R}{r})$ の水頭低下が起こり、井戸の外から内側へ流入するとき $h_2 (= \frac{Q}{k \sum \frac{a}{l}})$ の水頭低下が起こる。井戸の水面低下は両方合計したものとなる。

5. 井戸工事施工途中における揚水試験について

井戸の施工は長さ2m程度毎に型枠を組み立て、コンクリート投設の工事を行う。長さ6mの井戸が造成できた時点で揚水試験をする場合、井戸の水面低下を推定す



第14図 底から流入する井戸の流線図 (S=1/100)

ると0.82mとなる。このときの影響圏半径は441mである。但し揚水流量 $Q=0.125\text{ m}^3/\text{s}$ 、透水係数 $k=0.058\text{ m/s}$ とする。

流入面積 $a = \pi r^2 = 3.14 \times 2^2 = 12.56\text{ m}^2$

井戸内半径 $r = \sqrt{\frac{a_i}{3.14}}$

井戸外半径 $r = \sqrt{\frac{a_i}{3.14} + 2.5^2}$

影響圏半径

$R = \sqrt{\frac{4ktH_0}{\lambda}} = \sqrt{\frac{4 \times 0.058 \times 8 \times 3600 \times 9.6}{0.33}} = 441\text{ m}$

井戸の水面低下

$$h = \frac{Q}{k} \left(\frac{1}{2\pi H_0} \ln \frac{R}{r} + \frac{1}{\sum \frac{a}{\ell}} \right)$$

$$= \frac{0.125}{0.058} \left(\frac{1}{2 \times 3.14 \times 9.6} \times \ln \frac{441}{3.2} + \frac{1}{3.338} \right)$$

$$= 0.82\text{ m}$$

但し、揚水時間は8時間、滞水層の深さ $H_0=9.6\text{ m}$ 砂礫の空隙率は0.33とする。井戸外半径は第4表より3.2mである。

井戸へ流入する条件が異なると、井戸の水面低下は異なることを示している。

6. 井戸の水理設計について

揚水試験により透水係数 k を決定し、地質調査より透水層の厚さ H_0 を知るとき、影響圏半径 R は(6)式より

$$R = \sqrt{\frac{4kH_0t}{\lambda}} \tag{6'}$$

但し λ は砂礫の空隙率、 t は揚水時間である。計画揚水流量 Q を揚水するとき、井戸の水面低下 h は(4'')式で表すことができる。

$$h = \frac{Q}{k} \left(\frac{1}{2\pi H_0} \times \ln \frac{R}{r} + \frac{1}{\sum \frac{a}{\ell}} \right) \tag{4''}$$

但し r は井戸の外径に近い数値である。 $\sum \frac{a}{\ell}$ は地下水が井戸の外から内へ流入するとき、流線から得る数値である。 a は流入断面、 ℓ は流入長さを表す。

本井戸完成後、揚水試験を行なったところ、透水係数 k は0.058m/sであった。計画時、試験井戸を掘削して揚水試験を行なっている。それによると透水係数は0.010m/sであると報告されている。それを比較する

第4表 $\sum \frac{a}{\ell}$ 計算内訳

番号 i	透水長さ ℓ m	同左割合	流入面積 a m ²	同累計 $\sum a$	井戸外半径 r m	累計 $\sum a$	井戸内半径 r m	$\frac{a}{\ell}$
1	3.0	0.080	1.005	1.005	2.563	12.560	2.000	0.335
2	2.5	0.066	0.829	1.834	2.614	11.555	1.918	0.332
3	2.0	0.054	0.678	2.512	2.655	10.726	1.848	0.339
4	1.3	0.034	0.427	2.939	2.681	10.048	1.788	0.328
5	2.3	0.061	0.766	3.705	2.725	9.621	1.750	0.333
6	3.3	0.088	1.105	4.810	2.789	8.855	1.679	0.335
7	4.3	0.114	1.432	6.242	2.870	7.750	1.571	0.333
8	5.3	0.141	1.771	8.013	2.966	6.318	1.418	0.334
9	6.3	0.168	2.110	10.123	3.077	4.457	1.191	0.335
10	7.3	0.194	2.437	12.560	3.201	2.347	0.881	0.334
計	37.6	1.000	12.560					3.338

と6倍程度の差異がある。従って本井戸工事の段階で、計画揚水量を揚水して、設計の補完を行う必要がある。

結 論

底から地下水が流入する井戸について、一定の流量を汲みあげるとき、井戸の水面低下より透水係数を求める関係式を作成した。但し砂礫層の深さ及び空隙は調査により既知とする。

底から流入する井戸について、透水係数を求める方法としてはフォルヒハイマー式がある。砂礫層の深さは無限に大きいという仮定により導かれたものである。砂礫の深さは有限であるからこの前提条件には適しない。この方法によると、地下水の流入断面を大きく考えているから、透水係数は小さくなる。

既設の内径4m、深さ10mのかんがい用井戸で揚水試験を行ない、上記の方法で透水係数が得られることを示した。

井戸の効率については、本揚水例の場合15% ((1.01-0.86)/1.01) である。0.86mが井戸の損失である。著者が作成した流量に関する関係式(4)式は井戸の効率は入っている。井戸の設計に必要な余裕は別に見込まなければならない。

本井戸の透水係数は試験井戸の透水係数と異なることがある。本井戸の造成工事の途中で揚水試験を行ない、

計画を補完することが必要である。

要 約

底から流入のある井戸で、一定流量Qを揚水するとき、地下水頭の影響圏半径Rは

$$\frac{\lambda R^2}{4H_0 t} - \frac{Q}{2\pi H_0 h} \ln \frac{R}{r} - \frac{Q}{h \sum \frac{a}{\ell}} = 0 \quad (7)$$

但し H_0 : 滞水深, 被圧地下水

t : 揚水時間

λ : 砂礫の空隙率

r : 井戸の外側付近の半径

$\sum \frac{a}{\ell}$: 井戸の外側から内側へ地下水が流入するとき、流線より得られる数値, aは流入断面, ℓ は透水長さ

透水係数kは(6)式より

$$k = \frac{\lambda R^2}{4H_0 t}$$

引用文献

- 1) 守島正太郎：フォルヒハイマー深井戸に関する二、三の研究
三重大学農学部学術報告 第14巻 p95
- 2) 物部長穂：水理学 p448 丸善株式会社

Studies of Pumping Ground Water for Irrigation
 2. A method of finding permeability through
 gravel in the case of pressure head water

Yoshikazu ISOJIMA

SUMMARY

When we pump up pressure head ground water from a well, which flows from the bottom, the influential radius in the water head can be calculated from the following equation:

$$\frac{\lambda R^2}{4H_0 t} - \frac{Q}{2\pi H_0 h} \ell n \frac{R}{r} - \frac{Q}{h \sum \frac{a}{\ell}} = 0 \quad (7)$$

H_0 : depth of gravel.

t : pumping time.

λ : radio of the volume, between only ground water and gravel which contains ground water.

R : the farthest influential radius in the ground water head.

Q : volume of pumping up ground water per second.

h : difference of water head in the pumping well before and after pumping.

r : radius of well.

$\sum \frac{a}{\ell}$: ratio between the section and length of flowing pipe.

ℓn : natural logarithm based on e ($=2.718$).

Permeability of gravel can be calculated from the following equation:

$$k = \frac{\lambda R^2}{4H_0 t} \quad (6)$$

k : permeability of gravel.